



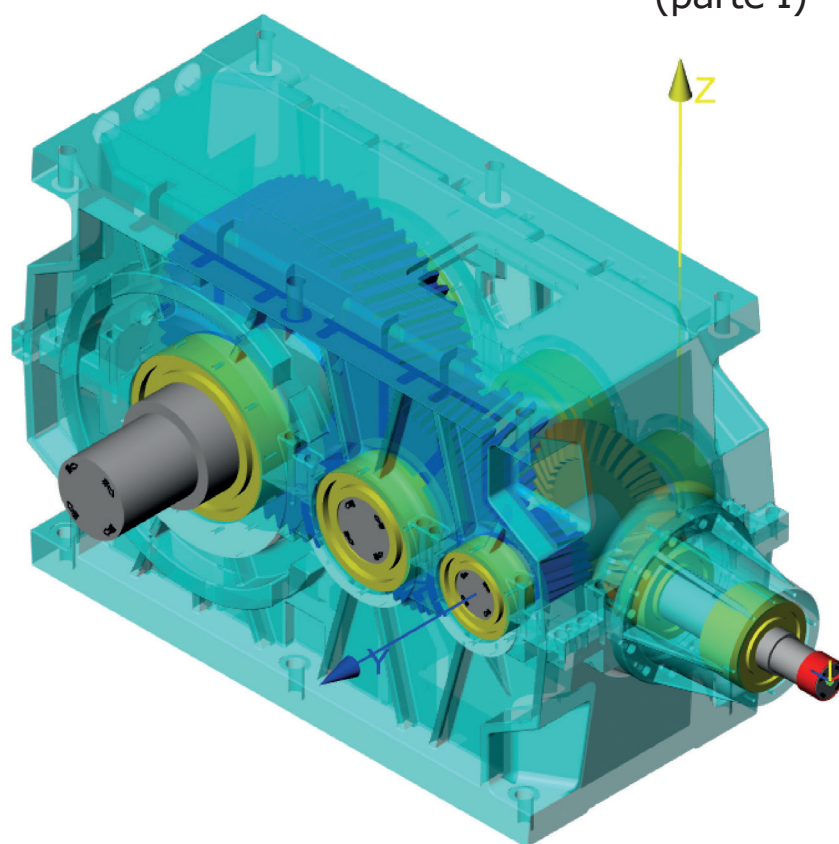
Come influisce la rigidezza della cassa del riduttore sul contatto delle

ruote dentate

(parte I)

La rigidezza della cassa influenza la posizione dei cuscinetti e quindi l'allineamento degli alberi quando il riduttore è sotto carico. La deformazione della cassa non incide però direttamente sulle prestazioni degli ingranaggi, ma sono i disallineamenti degli alberi che si vengono a creare, le deformazioni degli alberi, dei cuscinetti e degli ingranaggi e le tolleranze di lavorazione a influenzare le condizioni di ingranamento. Questo studio mette a confronto tutti questi contributi per identificare quello più rilevante.

di Dipl.-Ing. Jürg Langhart, KISSsoft AG
di Dr.-Ing. Ioannis Zotos, KISSsoft AG
traduzione a cura dell'ing. Massimiliano Turci



- Figura 1: Riduttore ad assi ortogonali modellato in KISSsys con il modello CAD della cassa.
- Figure 1: Bevel helical gearbox modelled in KISSsys with housing data (CAD file) imported.

La rigidezza della cassa di un riduttore influenza la posizione dei cuscinetti e quindi l'allineamento degli alberi quando il riduttore è sotto carico. La deformazione della cassa non incide però direttamente sulle prestazioni degli ingranaggi in termini di distribuzione del carico o di vibrazione. Sono i disallineamenti degli alberi causati dalla deformazione della cassa insieme alle deformazioni degli alberi, dei cuscinetti e degli ingranaggi e alle tolleranze di lavorazione a influenzare le condizioni di ingranamento. (*)

* Le considerazioni di seguito riportate valgono per riduttori industriali e potrebbero variare per altre applicazioni e modelli di cassa.

1. Esempio di applicazione

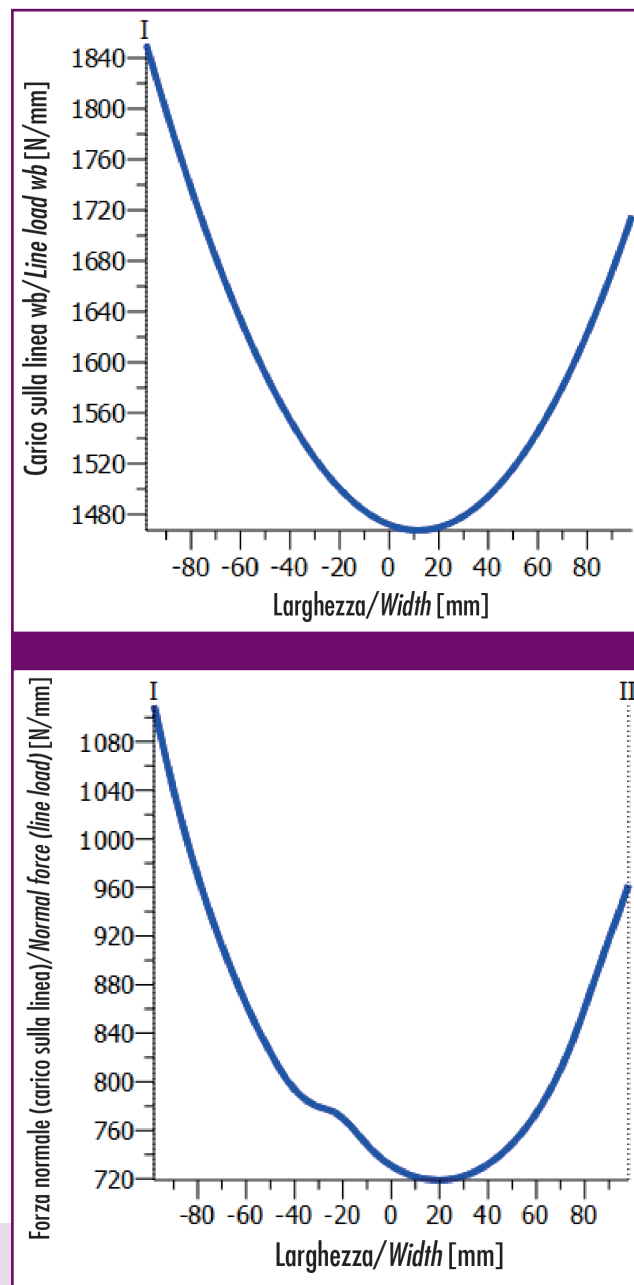
Si prenda in esame un riduttore ad assi ortogonali, attualmente in produzione alla Kissling AG in Svizzera. La potenza nominale è 600 kW e la temperatura di funzionamento varia fra 45°C e 60°C, con picchi fino a 80°C. Gli alberi e gli ingranaggi veloci possono lavorare a una temperatura leggermente più alta. La cassa è in ghisa EN-GJS 40.3 e presenta nervature di irrigidimento. Sono presenti uno stadio conico e dei due stadi ad assi paralleli. Lo stadio conico ha un rapporto 17:37, la corona ha un diametro esterno di 460 mm ed è tagliata col procedimento Zyκλο-Pal-loid®. L'albero pignone è supportato da una coppia di cuscinetti a rulli conici appaiati e da un cuscinetto orientabile a rulli. Gli ingranaggi cilindrici sono elicoidali con modulo normale $m_n = 8$ mm (coppia intermedia) e $m_n = 12$ mm (coppia di uscita). Gli ingranaggi sono in acciaio cementato, rettificati con un grado di qualità almeno Q=6 secondo ISO 1328. Tutti gli altri alberi sono supportati da due cuscinetti orientabili a rulli.

2. Procedimento

L'obiettivo è identificare quali siano i contributi che incidono sulla richiesta di modifiche della microgeometria (spoglia di testa e bombatura più o meno asimmetrica) dei vari ingranaggi. Tali modifiche sono calcolate per via numerica con una LTCA (loaded tooth contact analysis, analisi di contatto sotto carico) come indicato nella ISO 6336-1, Annex E (calcolo della linea di contatto lungo la fascia)

Sono stati presi in considerazione questi aspetti:

- Deformazione di alberi e cuscinetti (calcolo non lineare)
- Tolleranze di lavorazione di ingranaggi e cassa
- Deformazione della cassa
- Dilatazioni termiche a 80°C



● Figure 2:
Calcolo del carico lungo la fascia sul cilindro primitivo w_b [N/mm].
a) LTCA monodimensionale secondo ISO 6336-1, Annex E.
b) LTCA bidimensionale implementata in KISSsoft.
● Figure 2: Calculation of the line load w_b [N/mm] along the gear face width on the operating pitch cylinder. Left: Using one dimensional LTCA along ISO 6336-1, Annex E. Right: Using two dimensional LTCA as implemented in KISSsoft.

TECHNOLOGY

The Influence of the **Gearbox** Housing Stiffness on the Gear Mesh Load Distribution

The housing stiffness influences the bearing positions and, therefore, the shaft alignment once the gearbox is subjected to loads. However the housing deformation does not impact directly on the performance of the gears. The meshing conditions are, in fact, influenced by the shaft misalignments, the shaft and bearing deformations and by the gear manufacturing tolerances. In the following study, all these influences are studied and compared to identify those of greater relevance.

The housing stiffness influences the bearing positions and therefore the shaft alignments once the gearbox and therefore the housing is subjected to loads. However, the housing deformation does not yet allow for an assessment of the performance

of the gears in terms of e.g. load distribution or vibration. Further to the shaft misalignment caused by the housing deformation, the shaft and bearing deformations as well as gear manufacturing tolerances influence the meshing conditions. (*)

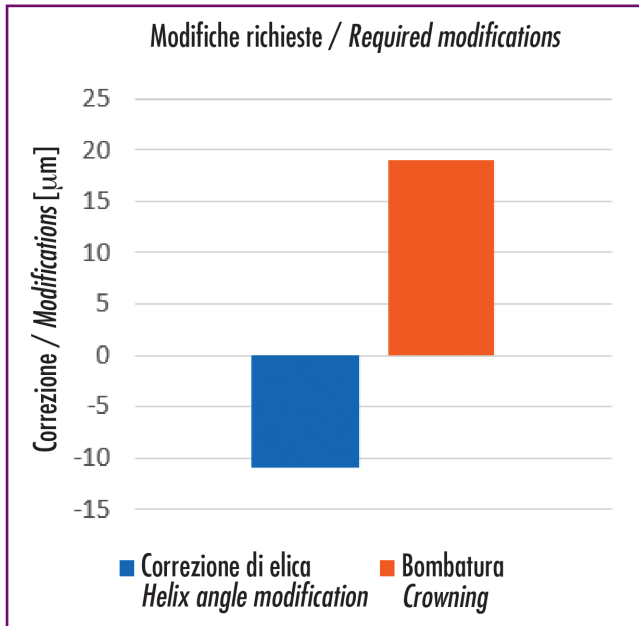
1. Application example

Let us consider a bevel helical gearbox, currently in production by KISSLING AG of Switzerland. Nominal power is 600 kW and the gearbox is operated in a temperature of 45°C to 60°C, with peaks up to 80°C. The highspeed side gears and shafts may have

(*) Note that the findings presented here are valid for compact industrial gearboxes and may be different for other applications or housing designs.

● Figura 3:
Modifiche di elica e bombatura dovute alla deformazione dell'albero e alla rigidità dei cuscinetti.

● Figure 3:
required tooth trace modifications due to shaft deformation and bearing stiffness.



Per calcolare la distribuzione di carico sugli ingranaggi come descritto nella ISO 6336-1 Annex E [1] e quindi l'errore di trasmissione è necessario un modello realistico delle deformazioni e dei cedimenti degli alberi. La componente assiale del disallineamento degli ingranaggi cilindrici non è importante come invece lo sono i cedimenti radiali H del pignone e J della corona conica. Per la coppia conica va posta particolare attenzione anche alle deformazioni termiche e gli spostamenti assiali dei cuscinetti.

3. Esame degli stadi ad assi paralleli

3.1 Metodi per la valutazione dell'impronta di contatto

L'impronta di contatto va calcolata in due fasi. Prima di tutto va fatto il calcolo della distribuzione del carico lungo la fascia, poi quello della pressione di contatto fra i denti con la LTCA. Per il calcolo della distribuzione del carico lungo la fascia è stato usato il metodo descritto nella ISO 6336-1 Annex E. Porta a risultati attendibili in tempi brevi e fornisce il valore del fattore $KH\beta$ necessario per il calcolo della capacità di carico degli ingranaggi. Questo metodo utilizza una LTCA monodimensionale la cui implementazione in KISSsoft è già stata descritta in [2]. È stato discusso nel comitato ISO-TC60 che si occupa della resistenza degli ingranaggi se vadano utilizzati i fattori di carico KA e dinamico KV nel calcolo della distribuzione di carico sulla linea. L'utente di KISSsoft può comunque scegliere come considerare questi fattori aggiuntivi nel calcolo del carico sulla linea [3]. È inoltre possibile fare un calcolo più raffinato con una LTCA bidimensionale, tenendo in considerazione il ricoprimento effettivo sotto carico [4]. Si ottengono risultati come l'errore di trasmissione, il conseguente PPTe, la potenza istantanea persa per attrito, la temperatura locale istantanea, lo spessore del film di lubrificante, il rischio a micropitting e così via. La LTCA bidimensionale porta a risultati molto più precisi rispetto al metodo della ISO 6336-1 Annex E, proprio perché quest'ultimo che considera invece solo il ricoprimento nominale.

slightly higher temperatures during operation. The cast housing is made of EN-GJS 40.3 and features a number of ribs to make the housing lightweight yet stiff. Considered in this study are the bevel gear stage and the parallel shaft stages. The parallel stages are achieved using helical gears with normal module $m_n = 8 \text{ mm}$ (intermediate stage) and $m_n = 12 \text{ mm}$ (output stage). The gears are ground after case carburizing to a quality grade of Q=6 along ISO 1328 or better. The shafts are supported by two spherical roller bearings each.

The spiral bevel gear stage is having a ratio of 17:37 with a wheel outer diameter of 460 mm, manufactured as a Zyklo-Palloid® set. The pinion shaft is supported by a paired taper roller bearing and a spherical roller bearing while the wheel shaft is supported by two spherical roller bearings.

2. Procedure

It is of interest to find out the influence of different factors on the required gear modifications. The gear modifications are then assessed using a numerical LTCA (loaded tooth contact analysis) as well as along ISO 6336-1, Annex E (for the calculation of the line

load along the face width). The following factors are considered:

- Influence of shaft and non-linear bearing deformation
- Influence of manufacturing tolerances (of gears and of housing)
- Influence of housing deformation
- Influence of temperature at 80 °C

A realistic modeling of the shaft displacement and the shaft deformation (which then leads to a gear misalignment) in radial and axial direction is required to calculate the gapping in the gear mesh along ISO 6336-1, Annex E and the resulting contact stress distribution and transmission error.

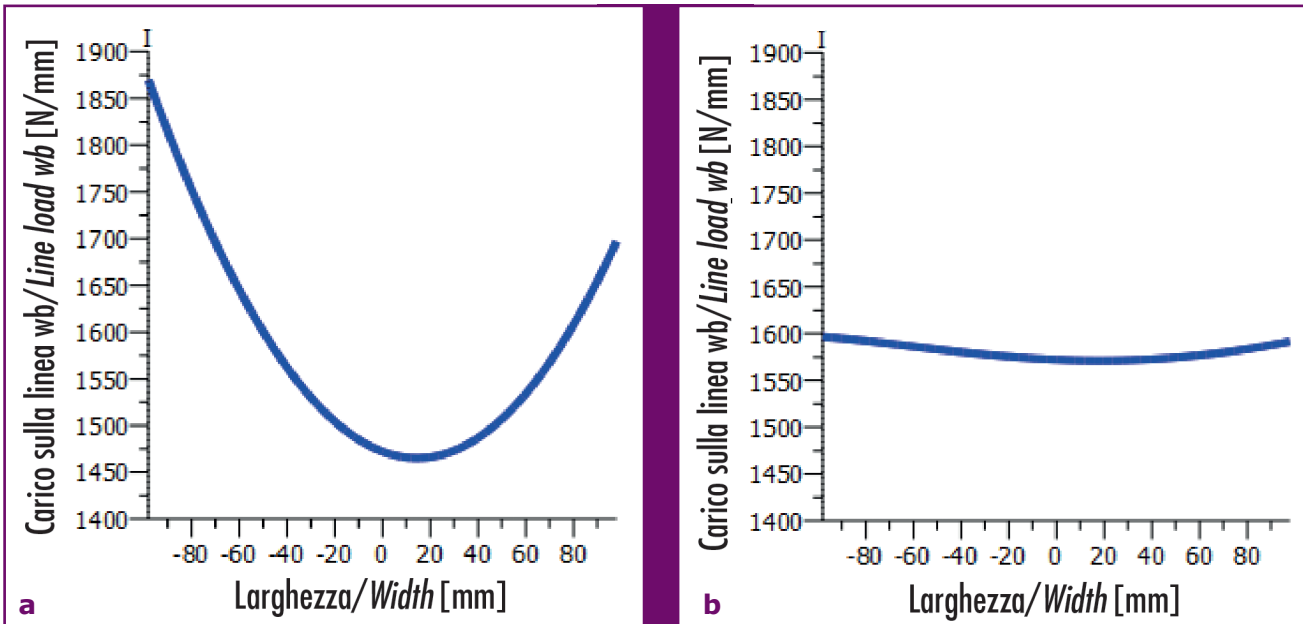
The axial component of the gear misalignment is not so relevant for parallel shaft gears but for the bevel gear stage as this influences the H displacement (for the pinion) respective the J displacement (for the gear). For bevel gears, thermal growth and axial bearing deformation are most relevant and require attention.

3. Investigation of the parallel shaft stages

3.1 Methods for the assessment of tooth contact

A tooth contact assessment should be done in two

steps. Firstly, a line load distribution along the face width, based on ISO 6336-1, Annex E calculation should be performed. Then, a holistic assessment of the contact force in the whole plane of action using a LTCA (loaded tooth contact analysis) should follow. For the assessment of the face load distribution, the calculation of the line load w [N/mm] along ISO 6336-1, Annex E [1], is recommended. It yields realistic values for the load distribution, a $KH\beta$ value needed for the strength rating and consumes little calculation time only. This method may be considered a one-dimensional LTCA and has been described in the context of its implementation in KISSsoft before [2]. A matter of discussion is whether load factors like KA or KV should be considered in the calculation of the line load distribution. This is currently (second half of 2016) being discussed and reviewed in the respective ISO committee (TC 60). In KISSsoft, the educated user may choose how to consider additional load factors in the line load calculation in the settings [3]. A more refined method is the two dimensional LTCA, where also the effective contact ratio under load is considered [4]. It also yields results like transmission error TE, peak to peak transmission PPTe, local power



● Figura 4:
Distribuzione del carico lungo la fascia, secondo ISO 6336-1 Annex E, considerando la deformazione di alberi e cuscinetti.
a) fianco non modificato
b) fianco con bombatura asimmetrica.

● Figure 4:
Line load distribution calculated using ISO 6336-1, Annex E, considering shaft and bearing deformation.
a) unmodified gear flank
b) tooth trace modifications are applied.

È quindi ovvio che i due metodi portino a risultati diversi per la distribuzione del carico. Comunque, una volta che è stata applicata la necessaria modifica di microgeometria, le differenze sono davvero minime. È preferibile allora usare il primo metodo, che è più veloce, per calcolare la microgeometria e poi la LTCA bidimensionale per controllarne gli effetti (Figura 2).

3.2 Influenza della deformazione di alberi e cuscinetti

Di seguito è riportato lo studio dello stadio di uscita. Prima di

tutto è stata calcolata la deformata dell'albero, che è funzione di taglio, torsione e flessione, con un metodo semi analitico basato sul modello di trave di Timoshenko.

Poi l'attenzione è stata posta sulla rigidità non lineare dei cuscinetti, esaminando il contatto fra gli elementi volventi e le relative piste di rotolamento [5]. La compressione degli elementi volventi è il risultato dello spostamento relativo fra anello esterno ed interno.

Nel calcolo si è tenuto conto anche del gioco in esercizio, che

losses due to friction, local contact temperature, local lubricant film thickness, micropitting risks values and others. The two dimensional LTCA also yields a more accurate line load distribution compared to the ISO 6336-1, Annex E method, as it does consider the true contact ratio which is affected by the tooth deformation (this effect is not considered in the one dimensional LTCA along ISO 6665-1, Annex E calculation where the theoretical contact ratio is considered only).

It is therefore obvious that the two methods may yield different results for the load distribution. However, once the appropriate modifications are applied, the differences are small. It is hence recommended to first design modifications based on the values elaborated using the ISO 6336-1, Annex E (which is very fast to use) and then to use - for a final check and for the profile modifications - the two dimensional LTCA (Figure 2).

3.2 Influence of shaft and bearing deformation

The below investigations are documented for the output stage. There, the influence of the shaft deformation influence is studied first. The shaft

deformation is a function of shear, torsion and bending loads and is calculated with a semi-analytical method using a Timoshenko beam model. Then, the non-linear bearing stiffness is considered by looking at each contact between a rolling element and the races along [5].

The compression of the rolling elements results in a displacement of the inner ring with respect to the outer ring. In this, also the bearing operating clearance (as a function of bearing clearance, fit on shaft and in housing, thermal expansion and centrifugal effects) is considered.

The housing deformation is not yet considered means the bearing outer ring are in the theoretical positions. A proposal for an optimal lead modification is provided by KISSsoft based on an algorithm along ISO 6336-1, Annex E. For the parallel shaft output stage, a helix angle modification of $cH\beta = -11 \mu\text{m}$ and a crowning of $c\beta = 19 \mu\text{m}$ is calculated (Figure 3). The line load distribution w_b with the mentioned influences is shown in Figure 4, left. In Figure 4, right, the resulting line load distribution w_b with the mentioned influences and modifications applied is shown in comparison. The face load distribution

factor $KH\beta$ drops from $KH\beta=1.17$ (without modifications) to $KH\beta=1.01$ (with modifications) what confirms the suitability of the modifications proposed by KISSsoft.

3.3 Influence of manufacturing tolerances

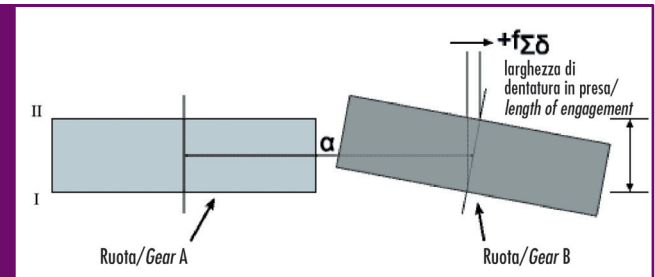
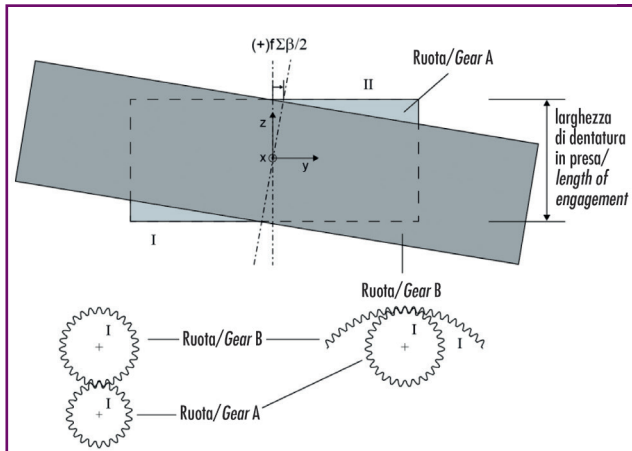
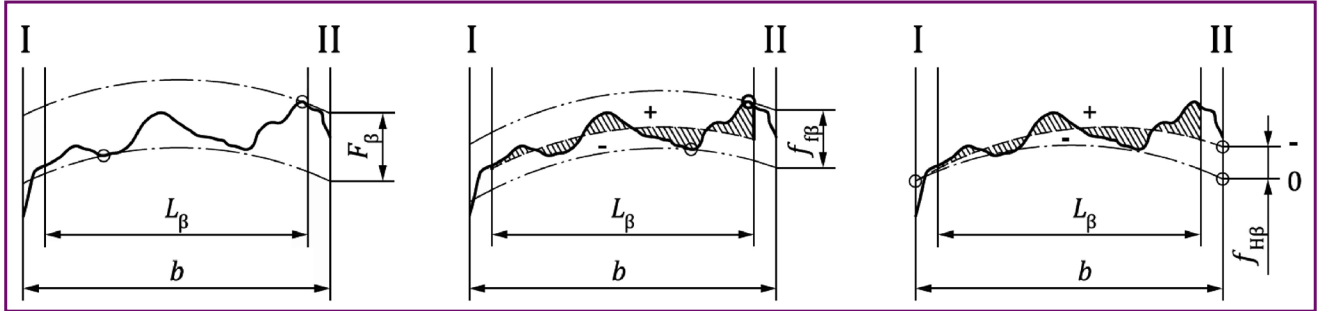
Further to the shaft and bearing deformation, the influence of manufacturing errors is to be considered. Said errors may in fact be the governing factor when determining the gear misalignment as well as suitable modifications to compensate those, they must therefore not be neglected. In general, two groups of tolerances are considered

- Helix slope deviations fH_b of the gears
- Shaft inclination and deviation errors fS_b , fS_d

Helix slope deviations along ISO 1328 [6] are related to the gear quality and hence influenced by the manufacturing process, Figure 5. For the gearbox considered here and the output stage with $mn=12$ mm, the permissible helix slope deviation is $fH_b=15 \frac{1}{4}\mu\text{m}$ for the pinion and $fH_b=16 \frac{1}{4}\mu\text{m}$ for the wheel. In KISSsoft, these two values may be considered in a worst-case scenario (resulting in a total misalignment of the flanks of $31 \frac{1}{4}\mu\text{m}$) or in a statistical approach

● Figura 5:
Definizione degli
errori di elica secondo
ISO 1328.

● Figure 5:
Definitions of flank line
deviations along
ISO 1328.



● Figura 6: Definizione dei disallineamenti secondo ISO/TR 10064-3.

● Figure 6: Definition of deviation and inclination error along ISO/TR 10064-3.

dipende dal gioco interno iniziale del cuscinetto, dall'interferenza dell'accoppiamento con l'albero e l'alloggiamento, dalla dilatazione termica e dall'effetto centrifugo. In questa fase non è stata ancora presa in esame la deformazione della cassa.

Cioè l'anello esterno del cuscinetto è stato considerato ancora nella sua posizione teorica.

La proposta di modifica lungo la fascia è stata ricavata da KISSsoft basandosi sul già citato algoritmo della ISO 6336-1, Annex

considering a probability of that 99.7%, which results in $22 \frac{1}{2} \mu\text{m}$ misalignment. The later approach is used here. Shaft alignment tolerances along ISO/TR 10064-3 [6] define permissible deviation and inclination errors with respect to the bearing span or gear face width (Figure 6).

ISO/TR 10064-3 determines permissible values for the above deviations from a permissible flank line error F_β , considering the bearing span L and the common gear face width b as follows:

$$f_{\Sigma\beta} = 0.5 \left(\frac{L}{b} \right) F_\beta$$

$$f_{\Sigma\delta} = 2 f_{\Sigma\beta}$$

The above components are combined to represent a misalignment in the plane of action, f_Σ :

$$f_\Sigma = f_{\Sigma\beta} + \frac{1}{3} f_{\Sigma\delta}$$

Values for the bearing span L , common face width b and permissible flank line deviation F_β are calculated based on the drawing data yielding a deviation error of $f_\Sigma\beta = 30 \mu\text{m}$ and $f_\Sigma\delta = 59 \mu\text{m}$. The resulting

misalignment in the plane of action is then $f_\Sigma = 50 \mu\text{m}$. Again, this is a worst case approach, while a statistical approach yields a value of $f_\Sigma = 33 \mu\text{m}$, the later is used.

Alternatively to the tolerances as per ISO/TR 10064-3, position tolerances from the drawings (or measured values) may be used, Figure 7. To compensate manufacturing errors, the use of helix angle modifications is not suitable as those errors are random by nature. To compensate random errors, either a lead crowning or a symmetrical end relief is required. The optimal lead crowning value is calculated by defining a range defining a lower and upper limit and a step size. The different crowning values are then combined with the above, constant helix angle modification of $cH_\beta = -11 \mu\text{m}$. In our example, ten different crowning values (minimum at $19 \mu\text{m}$,

maximum at $55 \mu\text{m}$) are created and combined with the constant helix angle modification, Figure 8.

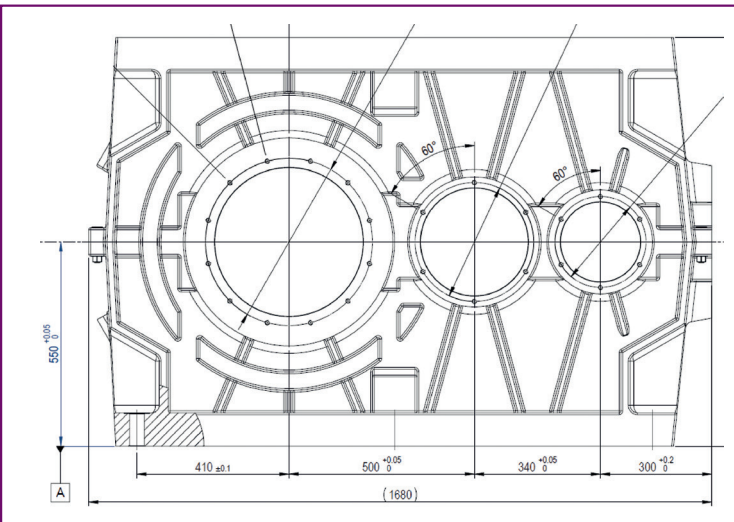
From the above calculations, comparing the face load factor for each of the ten solutions (solution no. 0 is the one without any modifications for comparison), we find that the face load factor KH_β is minimized if the lead crowning is applied with $cH_\beta = 43 \mu\text{m}$, Figure 9. A final check with these modifications, considering all combinations of the flank line error fH_β and the shaft misalignment error fma ($+fma +fH^2$, $+fma -fH^2$, $-fma +fH^2$, $-fma -fH^2$) shows that the modifications are most suitable to compensate both shaft/bearing deformations as well as random manufacturing errors. Under all conditions, dangerous edge loading is avoided, Figure 10.

We conclude that the required modifications are $cH_\beta = -11 \mu\text{m}$ and $cH_\beta = 43 \mu\text{m}$. In below Figure 11,

No.	Gear	Flank	Type of modification	Value [μm]	Factor 1	Factor 2
1	Gear 1	both	Helix angle modification,...	-11.0000		

No.	Gear	Synchroni.	Flank	Type of modification	Number of steps	Value (min)	Value (max)
1	Gear 1		both	Crowning	10	19.0000	55.0000

● Figure 8: Combining a constant helix angle modification with a varying crowning in the KISSsoft modifications sizing functionality.



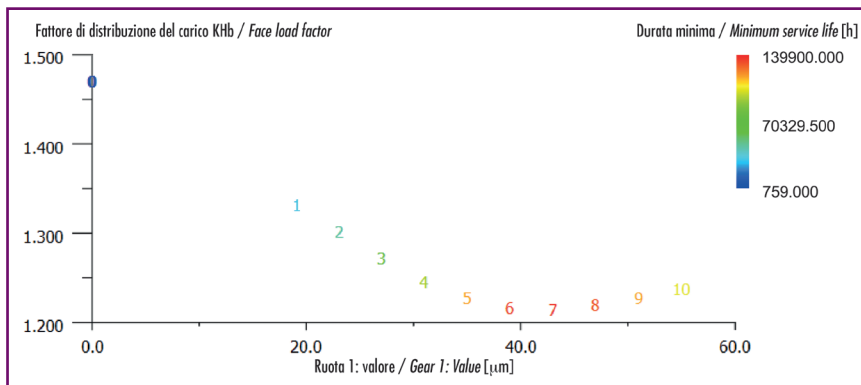
● Figura 7: Disegno della cassa con le tolleranze necessarie per calcolare gli errori di disallineamento degli assi.
 ● Figure 7: Determining the shaft misalignment tolerances from housing tolerances as given on the housing drawing.

E. Per lo stadio di uscita, ad assi paralleli, è stata calcolata una bombatura asimmetrica composta da una correzione dell'elica $ch\beta = -11 \mu\text{m}$ e una bombatura $c\beta = 19 \mu\text{m}$ (Figura 3). La Figura 4 mostra la distribuzione longitudinale del carico lungo la fascia w_b con e senza la bombatura asimmetrica. Il fattore di distribuzione longitudinale del carico $KH\beta$ passa da

Ruota dentata	Fianco	Tipo di correzione	Valore [μm]	Fattore 1	Fattore 2
Ruota 1	entrambi	Correzione angolo d'elica, conica	-11.0000		

N.	Ruota dentata	Sincronizz	Fianco	Tipo di correzione	Numero di passi	Valore (min) [μm]	Valore (max) [μm]
1	Ruota 1	1	entrambi	Bombatura longitudinale	10	19.0000	55.0000

● Figura 8: L'interfaccia dello strumento di ottimizzazione di KISSsoft per combinare il valore fisso della correzione dell'angolo dell'elica con quello iterato della bombatura simmetrica.



1.17 (senza modifiche) a 1.01 (con la bombatura asimmetrica), confermando la bontà del valore suggerito da KISSsoft.

3.3 Influenza delle tolleranze di lavorazione

Oltre alla deformazione di alberi e cuscinetti, sono state prese in considerazione anche gli errori di lavorazione. Potrebbero essere proprio questi errori a determinare il disallineamento degli ingra-

● Figura 9: Valori di $KH\beta$ e durata degli ingranaggi in funzione della bombatura.
 ● Figure 9: Resulting $KH\beta$ and gear life as a function of the crowning.

these values are shown together with the crowning of $ch\beta = 24 \mu\text{m}$ required to compensate manufacturing tolerances.

The resulting face load factor varies between $KH\beta=1.07$ and $KH\beta=1.16$, depending on how the random manufacturing errors are combined. Both values are acceptable considering that the resulting design is "robust", meaning, it is suitable for any combination of manufacturing errors within the specified tolerances.

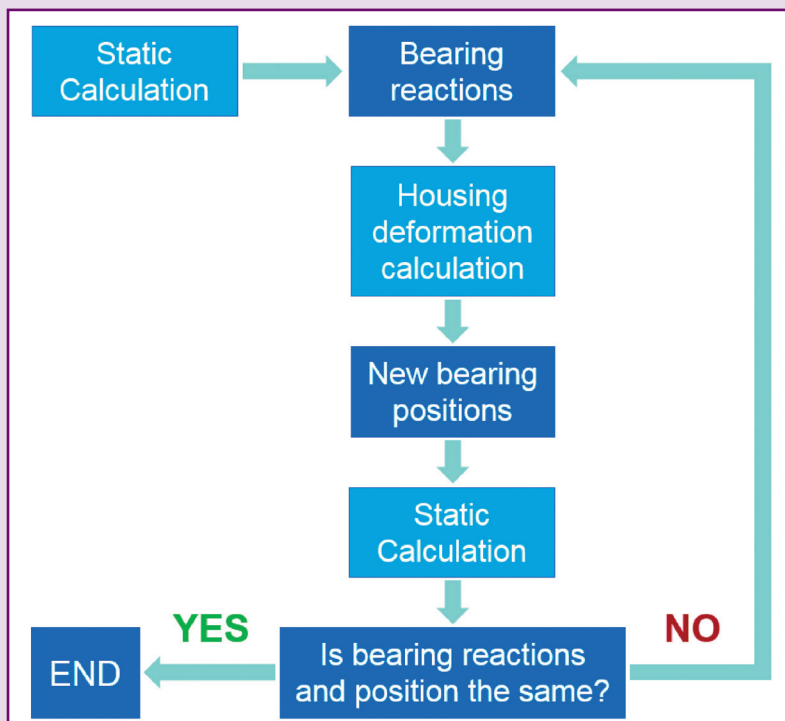
3.4 Influence of the housing deformation

Now, the influence of the housing deformation shall be considered. As bearing forces act on the housing and result in a deformation, the bearing (outer) ring are displaced with respect to its original position. The deformation of the housing is calculated inside KISSsys by using a reduced stiffness matrix of the housing and the mentioned bearing forces (compiled into a bearing force vector). The housing stiffness matrix is generated and exported from the FEM software (ABAQUS, ANSYS or NASTRAN). An iterative calculation is required as the housing deformation influences the shaft calculation. These result in new bearing forces, which again influences

the resulting housing deformation, Figure 12. The approach as implemented in KISSsys has been presented earlier in [8].

3.5 Relevant details of the housing stiffness matrix

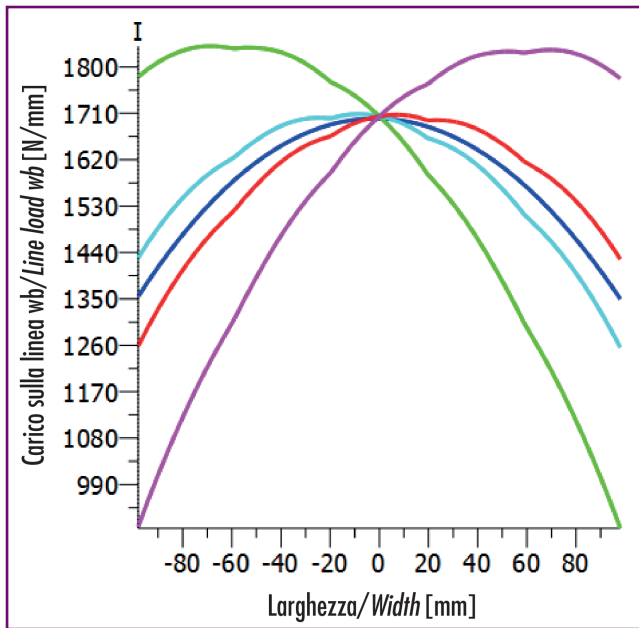
In the FEM model of the housing, the bearing centers need to be modeled with a single node, connected



● Figure 12: Iterative calculation of the housing deformation due to the bearing forces applied.

● Figura 10:
Andamento del carico sulla linea considerando la deformazione di alberi e cuscinetti, le modifiche e varie combinazioni di errori di costruzione su ingranaggi e cassa.

● Figure 10:
Line load distribution considering shaft / bearing deformation, modifications and different combinations of gear manufacturing errors and housing manufacturing errors.



naggi, quindi non possono essere trascurati nel definire le modifiche che li devono compensare. In genere si considerano due gruppi di tolleranze.

- Errore angolare di elica $f_{H\beta}$ delle ruote
 - Inclinazione dell'albero ed errori di disallineamento f_{Sb} , f_{Sd}
- Gli errori di elica definiti nella ISO 1328 [6] sono collegati al grado di precisione (qualità) della ruota dentata e dipendono quindi dal processo di lavorazione (Figura 5). Nel caso in esame, per lo stadio di uscita, che ha un modulo normale $m_n=12$ mm, il valore ammissibile dell'errore angolare dell'elica è $f_{H\beta}=15$ μm per il pignone and $f_{H\beta}=16$ μm per la corona. In KISSsoft, questi due valori possono essere considerati nel caso peggiore (con un disal-

to the surrounding bearing seat using e.g. RBE2 or RBE3 type elements (depending on the FEM code used). A simplification due to the modeling is to be accepted also because radial and axial forces are in reality supported by different surfaces.

In the gearbox shown here, the shafts of the two cylindrical gear stages are supported by spherical roller bearings. Their inner ring is using a p6 fit on the shaft and the outer ring a J6 fit on in the housing. The transition fit in the housing will result in the axial loads being transmitted by the shoulder shown below (red path) while radial loads are transmitted directly into the housing walls (green path).

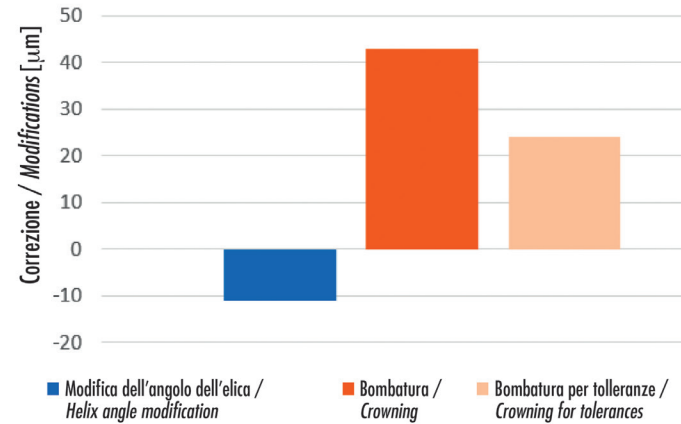
In the FEM model, the spherical roller bearing is supported only on the radial surface, resulting in a somewhat to stiff model for the axial forces. However, as the axial displacement of the shaft is not having a significant influence on the mesh of cylindrical gears,

this modelling approach is acceptable.

After importing the reduced stiffness matrix into KISSsys, the matrix is aligned with the KISSsys model by matching the centre of the bearings in the KISSsys model with the nodes located at the bearing centers in the FEM model. Then, the kinematic calculation is executed in KISSsys, the bearing forces are calculated and the bearing force vector is multiplied with the housing stiffness matrix giving a bearing displacement vector.

Before assessing the influence of the housing deformation on the gear meshes, let us look at the resulting housing deformations as calculated in KISSsys for the shafts no. 3 and no. 4 (output shaft). Figure 15 shows the total radial displacement of the shaft without (blue) and with consideration of the housing deformation (red). In both cases, the movement of the bearing inner ring with respect to

Modifiche richieste / Required modifications



● Figura 11: Modifiche richieste per compensare gli errori casuali di costruzione.
● Figure 11: Required lead modifications in total and crowning required to compensate random manufacturing errors / tolerances.

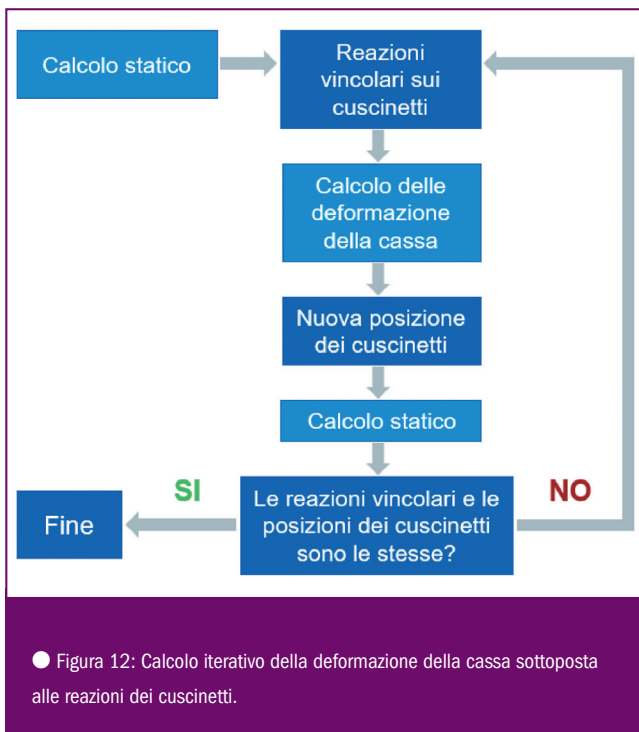
lineamento totale di 31 μm) oppure con approccio statistico (22 μm con una probabilità del 99.7%). Si è scelto quest'ultimo. La ISO/TR 10064-3 [6] definisce le tolleranze per gli errori di posizionamento degli alberi, tenuto conto della larghezza di fascia delle dentature e delle distanze fra i cuscinetti. (Figura 6). I valori ammissibili per questi errori sono funzione, della distanza fra i cuscinetti L , dell'errore totale di elica F_{β} e della larghezza di fascia comune alle due dentature b , secondo queste relazioni:

$$f_{\Sigma\beta} = 0.5 \left(\frac{L}{b} \right) F_{\beta}$$

$$f_{\Sigma\delta} = 2 f_{\Sigma\beta}$$

the outer ring due to bearing operating clearance and deformation is considered. We observe that the change in shaft displacement is less than 10 μm when we also consider the housing deformation. As the change in shaft displacement is small once the housing deformation is considered, the required change in the gear flank modifications will also be small. In the example considered, the required change in helix angle modification is only $\Delta cH\beta = -2$ μm to compensate the change in the gear alignment. This change has no practical relevance and is well within any manufacturing tolerances. The required total helix angle modification is now $cH\beta = -13$ μm and $c\beta = 43$ μm , Figure 16.

Finally, we may conclude that for the output stage, the influence of the housing deformation is not significant in this example where the housing was well design and is hence stiff. ●



I due contributi si combinano sul piano primitivo, dando un disallineamento totale, f_{Σ} :

$$f_{\Sigma} = f_{\Sigma\beta} + \frac{1}{3} f_{\Sigma\delta}$$

I valori di L , b ed F_{β} sono stati ricavati dai disegni: gli errori di posizionamento degli alberi sono risultati $f_{\Sigma\beta} = 30 \mu\text{m}$ e $f_{\Sigma\delta} = 59 \mu\text{m}$. Il disallineamento totale sul piano primitivo è quindi $f_{\Sigma} = 50 \mu\text{m}$. Aniché usare questo valore, riferito al caso peggiore, si è preferito l'approccio statistico, con $f_{\Sigma} = 33 \mu\text{m}$.

In alternativa si sarebbero potute considerare le tolleranze di posizione prese dalla tavola (Figure 7) o addirittura misurate i valori sulla cassa stessa.

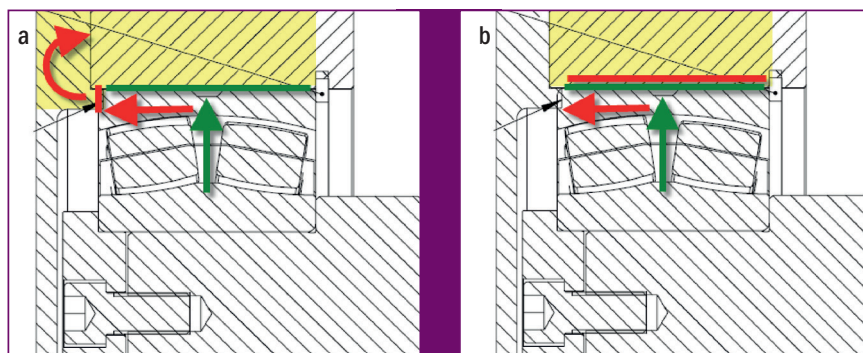
Per compensare gli errori di costruzione, che hanno un orientamento casuale per loro natura, la correzione dell'angolo dell'elica non va bene. Va utilizzare la bombatura simmetrica o la spoglia di estremità (sempre simmetrica).

Per trovare il valore ideale di correzione dell'elica, si è utilizzato un algoritmo di ottimizzazione, combinando il valore costante di correzione dell'angolo dell'elica $cH_{\beta} = -11 \mu\text{m}$ con quello di 10 possibili valori di bombatura, fra un minimo di $19 \mu\text{m}$ e un massimo di $55 \mu\text{m}$ (figura 8).

Per ciascuna delle dieci proposte, oltre che per la situazione iniziale senza correzioni (indicata con 0), è stato calcolato il fattore di distribuzione longitudinale del carico KH_{β} , in modo da identificare quella che lo minimizza. La bombatura scelta è $cH_{\beta} = 43 \mu\text{m}$ (Figura 9).

Successivamente è stato fatto un controllo globale incrociando tutte le combinazioni di disallineamento sul piano primitivo sulla linea d'azione $f_{H\beta}$ e di errori di costruzione f_{ma} ($+f_{ma} + f_{H\beta}$, $+f_{ma} - f_{H\beta}$, $-f_{ma} + f_{H\beta}$, $-f_{ma} - f_{H\beta}$).

La modifica scelta si è confermata quella ideale per compensare sia le deformazioni sia gli errori di costruzione che hanno un



orientamento casuale. In tutte le condizioni è stato evitato il pericoloso contatto sulle estremità (Figura 10).

Si è concluso che le modifiche richieste sono $cH_{\beta} = -11 \mu\text{m}$ e $cH_{\delta} = 43 \mu\text{m}$. In Figura 11, questi valori sono mostrati insieme alla bombatura di $cH_{\beta} = 24 \mu\text{m}$ richiesta per compensare gli errori di costruzione. (figura 11). Il fattore di distribuzione longitudinale del carico KH_{β} varia così da 1.07 a 1.16, in funzione della combinazione degli errori di costruzione. Sono entrambi valori accettabili, il progetto è "robusto", cioè è poco suscettibile alle variazioni nel campo delle tolleranze.

● Figura 13:
a) Le forze radiali e assiali agiscono su elementi diversi della cassa
b) Semplificazione nel modello FEM: le forze assiali e radiali agiscono sulla stessa superficie.

3.4 Influenza della deformazione della cassa

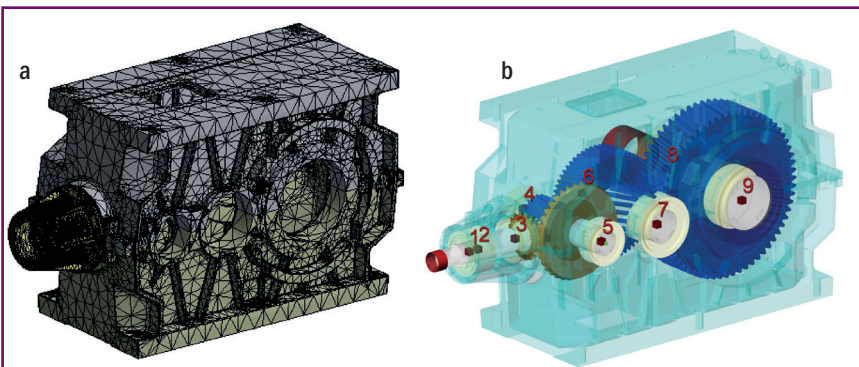
Come ultimo passaggio, è stata presa in considerazione la deformazione della cassa. La reazione del cuscinetto agisce come forza sulla cassa e la deforma, l'anello esterno del cuscinetto viene quindi riposizionato di conseguenza. La deformazione della cassa è calcolata direttamente da KISSsys utilizzando la matrice di rigidezza della cassa stessa condensata sui centri geometrici dei cuscinetti, sui quali sono applicate le reazioni dei cuscinetti come vettori forza. La matrice di rigidezza condensata può essere generata ed esportata dai più noti software FEM (ABAQUS, ANSYS or NASTRAN).

È necessario un calcolo iterativo [8], perché la deformazione della cassa influenza il calcolo dell'albero e quindi delle reazioni sui cuscinetti, che a loro volta deformano la cassa (Figure 12).

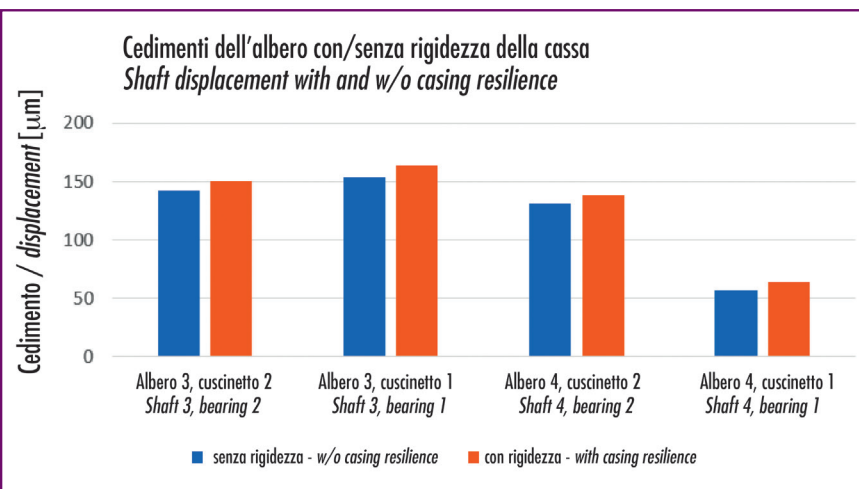
3.5 Particolarità della matrice di rigidezza

Nel modello FEM della cassa, il centro del cuscinetto è modellato con un singolo nodo, collegato alla sede tutt'attorno con elementi RBE2 or RBE3, a seconda del codice FEM usato. È una semplificazione accettabile, per quanto le forze assiali e radiali siano in realtà supportate da superfici differenti.

In figura 13 è mostrato l'albero intermedio, quello con le due ruote cilindriche. È supportato da cuscinetti orientabili a rulli. Sull'albero, in corrispondenza della sede dell'anello interno del cuscinetto, c'è una tolleranza $p6$; sulla cassa $J6$. La reazione assiale del cuscinetto si scarica sul coperchio e quindi passa alla cassa (percorso rosso), mentre quella radiale è supportata direttamente dalla cassa (percorso verde). Nel modello FEM, il cuscinetto orientabile a rulli è supportato invece da un'unica superficie, come se il modello fosse infinitamente rigido in direzione assiale. È un'approssimazione accettabile, in quanto lo spostamento assiale dell'albero non ha un effetto significativo sul contatto fra gli ingranaggi.

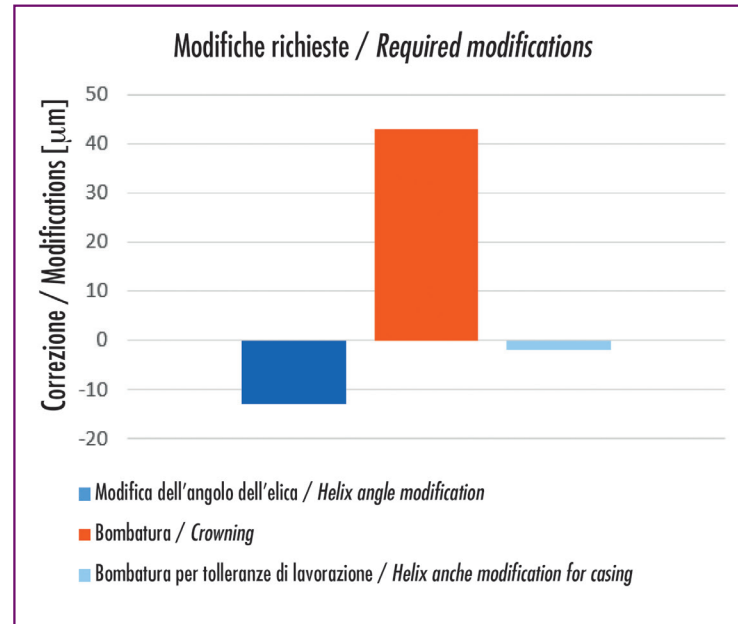


● Figura 14: a) modello FEM della cassa del riduttore.
 b) matrice di rigidità e modello CAD della cassa importate in KISSsys.
 ● Figure 14: a) FEM model of the gearbox housing.
 b) Stiffness matrix and housing CAD model imported in KISSsys.



● Figura 15:
 Cedimenti radiali dell'albero dovuti al gioco di funzionamento dei cuscinetti con o senza la deformazione della cassa.
 ● Figure 15:
 Radial displacement of the shafts due to bearing operating clearance and deformation and with / without housing deformation.

La matrice di rigidità condensata è importata in KISSsys e si posiziona facendo coincidere i centri dei cuscinetti del modello KISSsys con i nodi posizionati nei centri dei cuscinetti del modello FEM. In seguito, col calcolo cinematico di KISSsys si ricavano le reazioni dei cuscinetti. Il vettore di tali forze di reazione, moltiplicato per la matrice di rigidità, produce il vettore degli spostamenti dei cuscinetti (Figura 14). Prima di valutare l'influenza della rigidità della cassa sul contatto fra gli ingranaggi, va notato che le deformate degli alberi, in particolare quelli degli alberi 3 (intermedio) e 4 (lento). La Figura 15 mostra lo spostamento radiale dei cuscinetti di questi due alberi considerando o no la rigidità della cassa. In entrambi i casi sono stati presi in considerazione sia la deformazione sia il movimento dell'anello interno del cuscinetto rispetto a quello esterno, dovuto al gioco di funzionamento. La differenza di spostamento fra i due casi è meno di 10 μm (figura 15). Se è piccolo la differenza di spostamento degli alberi, considerando o no la rigidità della cassa, sarà altrettanto piccola la differenza di modifica di elica necessaria per compensarla. Nel caso in esame. La differenza di modifica di



● Figura 16: Modifiche del fianco richieste dovute alla sola deformazione della cassa.
 ● Figure 16: Required lead modifications due to the housing deformation alone.

elica è solo $\Delta cH\beta = -2 \mu\text{m}$: un valore che non ha significato fisico, visto che rientra all'interno delle tolleranze di lavorazione. Le modifiche di elica sono $cH\beta = -13 \mu\text{m}$ e $c\beta = 43 \mu\text{m}$, Figure 16. In conclusione, si può affermare che la deformazione della cassa non ha influenza sul contatto nello stadio di uscita del riduttore in esame, per il quale la cassa è stata ben progettata ed è sufficientemente rigida. ●

Bibliografia

- ISO 6336, Teil 1: Calculation of load capacity of spur and helical gears; ISO Geneva, 2006
- Kissling, U.: Sizing the gear micro geometry – Step by Step; BGA GEARS, 2015
- KISSsoft/KISSsys manual, Design software for mechanical engineering, www.KISSsoft.AG
- Mahr, B.: Kontaktanalyse; Antriebstechnik 12/2011, 2011
- ISO/TS 16281: Rolling bearings – Methods for calculating the modified reference rating life for universally loaded bearings; Geneva, 2008
- ISO 1328-1: Cylindrical gears – ISO system of flank tolerance classification; Geneva, 2013
- ISO/TR 10064-3: Recommendations relative to gear blanks, shaft centre distance and parallelism of axes; ISO Geneva, 1996
- Langhart, J.: Einfluss der Gehäusesteifigkeit auf die Verzahnungslaufeigenschaften; DMK 2015
- Klingelberg, J.: bevel gears; Springer Verlag, Berlin, 2008
- ISO 10300, part 1: Calculation of load capacity of bevel gears; ISO Geneva, 2014